1. La conversione analogico digitale (A/D)

La conversione A/D è una operazione che permette di rappresentare un segnale analogico, cioè continuo nel dominio del tempo e delle ampiezze, mediante una sequenza di campioni numerici. Tale operazione è usualmente rappresentata come sequenza di tre fasi distinte, note come campionamento, quantizzazione, e codifica. Il campionamento è una discretizzazione del segnale nel dominio del tempo, che permette di passare dall'insieme continuo di istanti in cui è definita la forma d'onda analogica da convertire a un insieme discreto di valori analogici, detti "campioni", che lo rappresentano senza perdere informazione. La quantizzazione consiste invece della discretizzazione delle ampiezze dei campioni, che a valle del campionamento sono ancora continue. Infine la codifica determina il tipo di rappresentazione numerica dei risultati della quantizzazione.

Fig. 1: Operazioni associate alla conversione A/D

2. La quantizzazione nella conversione A/D

2.1 Introduzione

La quantizzazione è una trasformazione che associa all'intervallo continuo di valori che può assumere il segnale in ingresso al convertitore una serie di valori discreti. Operativamente tale operazione può essere ricondotta a tre fasi. La prima è la definizione di un insieme di intervalli A_i, costituenti una partizione dell'asse reale dei valori analogici del segnale in ingresso al convertitore. Gli intervalli sono cioè disgiunti, e la loro unione è l'asse reale. Formalmente ciò si può esprimere come

$$
\begin{aligned}
&A_i = [s_{i-1}, s_i], \qquad s_{i-1} \le s_i, \qquad i = 0,\dots,M-1 \\
&A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \\
&\bigcup_{i=0}^{M-1} A_i = \Re
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

in cui s_{i-1} ed s_i sono rispettivamente gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo A_i. A ciascuno di tali intervalli viene associato un simbolo, generalmente un numero intero, detto *codice*. Se la partizione consta di M intervalli, avremo allora M simboli $\{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}\}$.

La seconda fase è la verifica dell'appartenenza o meno di ciascun campione $x[n]$ da quantizzare a ciascuno di questi intervalli. Si osservi che, dal momento che gli intervalli A_i coprono l'asse reale, ve ne sarà sempre almeno uno che contiene $x[n]$, mentre essendo gli intervalli disgiunti, $x[n]$ può appartenere solo ad uno ed uno solo degli intervalli. In altre parole, è sempre possibile associare univocamente un intervallo di quantizzazione ad un campione.

La terza fase è l'associazione al campione $x[n]$ del simbolo c_i corrispondente all'unico intervallo A_i cui $x[n]$ appartiene, cioè

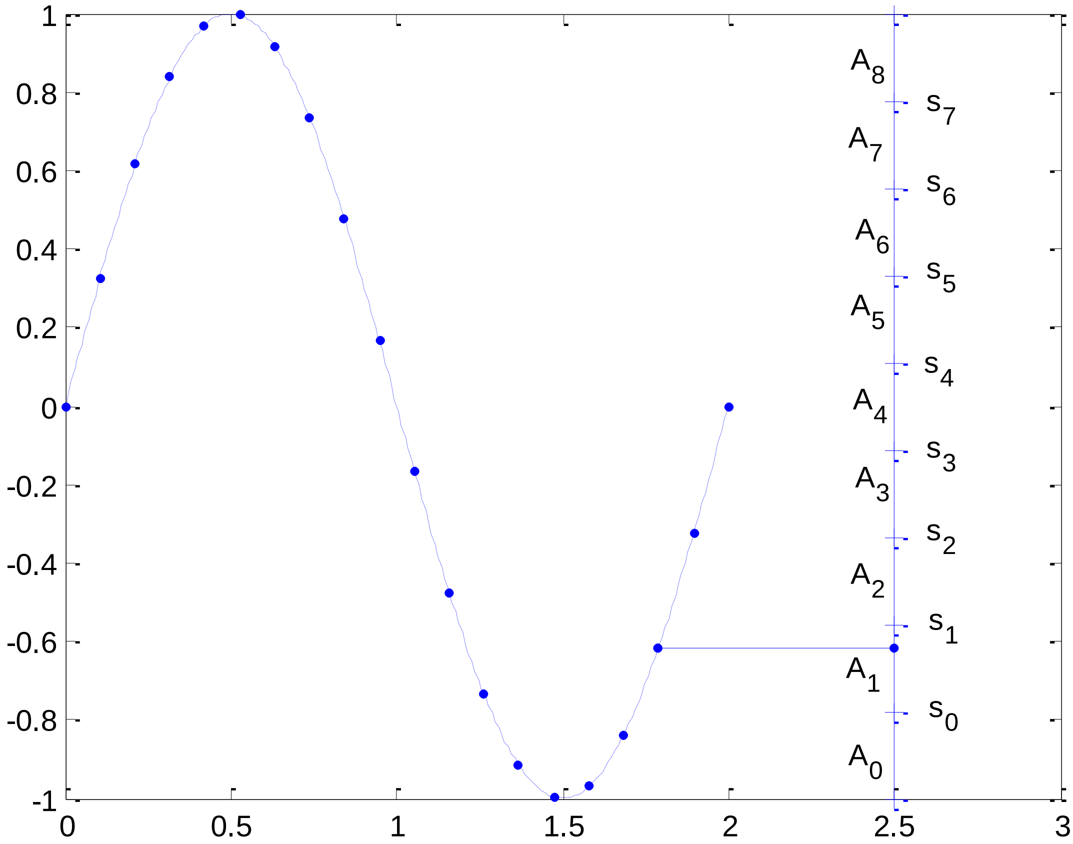

Fig. 2: Quantizzazione di una sinusoide. I campioni acquisiti vengono associati a degli intervalli che formano una partizione dell'asse reale. In Figura, il 18-esimo campione viene associato all'intervallo A_1, a cui appartiene.

$$
\begin{aligned}
&x_q[n] = c_i \Leftrightarrow x[n] \in A_i\,,\\
&x[n] \in A_i \Leftrightarrow s_{i-1} \le x[n] < s_i
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

Si osservi che la seconda riga della (2.2) implica che l'appartenenza del campione $x[n]$ all'intervallo A_i può essere verificata confrontando il campione stesso con gli estremi s_{i-1} ed s_i dell'intervallo stesso. Tali estremi sono noti come livelli di soglia (*thresholds*) o livelli di transizione (*transition levels*) del convertitore A/D. Di conseguenza, quando un convertitore A/D produce in uscita il simbolo *i*-esimo, ciò può essere riassunto dalla frase "Il campione acquisito $x[n]$ appartiene all'intervallo A_i". Si osservi che se due campioni diversi tra loro appartengono allo stesso intervallo di quantizzazione, in uscita al convertitore A/D risultano indistinguibili. La situazione è riassunta dalla Fig. 2, in cui compaiono i campioni di una sinusoide (i valori intermedi appaiono come linea tratteggiata), gli intervalli di quantizzazione A_i e i loro estremi s_i. In particolare si può osservare che il 18-esimo campione $x[17]$ appartiene all'intervallo A_1, per cui, definendo come codice di uscita l'indice dell'intervallo di appartenenza, avremo $x_q[17]=1$.

2.2 Rumore di quantizzazione

La quantizzazione è una operazione che comporta intrinsecamente una perdita di informazione. Infatti, mentre in ingresso si ha un valore ben preciso per il livello del segnale, in uscita si ha solo l'appartenenza a un intervallo di valori, che è una informazione meno circostanziata. Inoltre, a differenza del campionamento, l'informazione è persa definitivamente, in quanto non è possibile risalire al valore esatto del campione in ingresso a partire dai dati prodotti. Per quanto visto nella sezione precedente, un convertitore A/D riceve in ingresso un segnale analogico (generalmente una tensione o più raramente una corrente elettrica) e produce in uscita un simbolo (generalmente un numero intero), detto codice. Questa operazione da sola non permette di valutare la quantità di informazione perduta nel passare dal valore del campione all'appartenenza ad un intervallo, in quanto il codice in uscita, essendo un numero puro, non è direttamente confrontabile con la grandezza analogica in ingresso. Di conseguenza, per permettere di valutare la quantità di informazione persa, si conviene di associare a ciascun codice *i*-esimo un livello analogico di riferimento in uscita y_i, uno per ciascun intervallo, e di confrontare quest'ultimo con il livello del segnale convertito per determinare quanta informazione è stata perduta. Sotto questa ipotesi, ha senso parlare di errore di quantizzazione, definito da

$$e[n] = y_q[n] - x[n], \qquad (2.3)$$

e la frase "Il campione acquisito appartiene all'intervallo A_i" diventa "Il campione acquisito $x[n]$ appartiene all'intervallo A_i ed è indistinguibile dal livello di riferimento $y_q[n]$".
In particolare, per un convertitore istantaneo uniforme, i livelli di transizione s_i sono equidistanti tra di loro, e la distanza Δ è detta passo di quantizzazione del convertitore. Similmente, si definiscono i punti medi di tali intervalli come livelli equivalenti di uscita. Definendo rispettivamente come FS_H e FS_L i fondo scala superiore e inferiore del convertitore, si ha:

$$\begin{aligned} &\Delta = \frac{FS_H - FS_L}{2^b}, \\ &s_i = FS_L + \Delta \cdot i, \quad i = 1..N-1, \qquad N = 2^b, \\ &y_i = FS_L + \Delta \cdot i + \frac{\Delta}{2}, \qquad i = 0..N-1 \end{aligned} \qquad (2.4)$$

in cui *b* è la risoluzione del convertitore. In particolare, se il convertitore è bipolare e simmetrico, si ha $FS_H = FS$ ed $FS_L =- FS$, per cui:

$$\Delta = \frac{2FS}{2^b} = \frac{FS}{2^{b-1}}. \qquad (2.5)$$

Dalle ipotesi poste, segue che se un campione è compreso tra i fondo scala di un convertitore uniforme, cioè $FS_L \leq x[n] < FS_H$, l'errore di quantizzazione è compreso tra $-\Delta/2$ e $\Delta/2$, cioè

$$|e[n]| \leq \frac{\Delta}{2}, \qquad (2.6)$$

in quanto l'errore può essere al più la distanza tra $y_q[n]$ e una delle due soglie di quantizzazione, il cui modulo è superiormente limitato da $\Delta/2$. Se il segnale è anche tempo variante e tale che campioni diversi appartengano con buona probabilità a intervalli di quantizzazione diversi, può essere inoltre dimostrato che la sequenza dei campioni del rumore di quantizzazione ha le caratteristiche di un processo aleatorio stazionario, bianco e uniforme in $[-\Delta/2, \Delta/2]$, con potenza $\sigma_q^2 = \Delta^2/12$. In questo caso, l'errore di quantizzazione è detto *granulare*.
Se invece $|x[n]| > FS$, l'errore di quantizzazione è detto di *overload*, non è più un processo bianco, non è in generale uniformemente distribuito, e non è limitato in modulo da $\Delta/2$. Di conseguenza, per un convertitore operante in *overload*, la potenza dell'errore di quantizzazione può eccedere anche notevolmente $\Delta^2/12$. Se invece il segnale varia lentamente, l'errore non è più descrivibile da una variabile aleatoria uniforme. Ad esempio, la quantizzazione di una sequenza costante $x[n]=k_x$ produce due sequenze costanti di campioni di uscita $y_q[n]=k_y$ e di errore $e[n]=k_e$. Di conseguenza, la densità di probabilità dell'errore $f_e(e)$ è l'impulso di Dirac

$$f_e(e) = \delta(e - k_e), \qquad (2.7)$$

molto diverso dalla densità di probabilità uniforme.

2.3 Prestazioni di un convertitore A/D

La prestazione di un convertitore A/D è espressa principalmente dal rapporto segnale/rumore di quantizzazione (*SQNR*, *Signal to Quantization Noise Ratio*), dato da

$$SQNR = \frac{Px}{\sigma_q^2}\,, \qquad (2.8)$$

oppure dalla risoluzione equivalente b_e (*Effective Resolution*). Supponendo che il segnale sia una sinusoide di ampiezza *A*, si ha $P_x=A^2/2$. Ipotizzando inoltre che il segnale convertito vari adeguatamente da un campione all'altro, senza mai eccedere il *range* dinamico *FS* di un convertitore bipolare simmetrico, il rumore di quantizzazione è granulare, con potenza $\sigma_q^2=\Delta^2/12$, per cui

$$SQNR = \frac{Px}{\sigma_q^2} = \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{\Delta^2}{12}} = \frac{6A^2}{\Delta^2} \qquad |A| \leq FS \qquad (2.9)$$

La (2.9) mostra che per un segnale sinusoidale, il *SQNR* è massimo per *A*≅*FS*, ed è pari a

$$SQNR_{MAX} = \frac{6FS^2}{\Delta^2}\,. \qquad (2.10)$$

Per *A*<*FS*, il *SQNR* si abbassa, in quanto il segnale non attraversa tutti gli intervalli di quantizzazione (è come avere un convertitore con risoluzione e *range* dinamico minori). Se *A*>*FS*, il convertitore opera in regime di *overload*, e si può dimostrare che in questo caso il *SQNR* tende ad abbassarsi rapidamente all'aumentare di *A*. Questo risultato ha validità generale, nel senso che per qualunque tipo di segnale in ingresso al convertitore esiste una rapporto ottimale tra il *range* dinamico del segnale e quello del convertitore, che massimizza il *SQNR*. Se il convertitore è uniforme, inoltre, utilizzando la (2.5) nella (2.10) si ottiene

$$SQNR_{MAX} = \frac{6FS^2}{\Delta^2} = \frac{6\left(\Delta 2^{b-1}\right)^2}{\Delta^2} = \frac{3}{2}2^{2b}\,, \qquad (2.11)$$

che espressa in decibel, diviene

$$SQNR_{dB} = 10\cdot\log\left(\frac{3}{2}2^{2b}\right) = 10\cdot\log\left(\frac{3}{2}\right) + b\cdot 20\cdot\log(2) \cong 1.76 + 6.02\cdot b\,. \qquad (2.12)$$

La (2.12) lega la risoluzione nominale di un convertitore ideale al *SQNR*. In un convertitore reale con una risoluzione nominale di *b* bit, tuttavia, il *SQNR* è più basso di quanto previsto dalla (2.12), in quanto nel dispositivo sono presenti ulteriori sorgenti di inaccuratezza. Tuttavia, una volta misurato il *SQNR*, si può invertire la (2.12), calcolando la risoluzione nominale b_e che dovrebbe avere un convertitore A/D ideale per avere lo stesso *SQNR* riscontrato. Tale parametro è detto risoluzione effettiva o equivalente del convertitore, ed è sempre minore o uguale alla risoluzione nominale.

Altri parametri caratterizzanti il convertitore sono infine la distorsione armonica totale (*THD*, *Total Harmonic Distortion*), data dalla somma della potenza delle armoniche rilevate in uscita a un ADC alimentato da un segnale sinusoidale, il Range Dinamico Libero da Spurie (*SFDR*, *Spurious Free Dynamic Range*), che sotto le stesse condizioni è la differenza in decibel tra la potenza della fondamentale in uscita all'ADC e la potenza della componente armonica più potente tra quelle presenti, e il *SINAD* (*Signal to Noise And Distortion ratio*), che è il rapporto tra la potenza del segnale e la somma tra la potenza del rumore di quantizzazione e di tutte le armoniche e componenti spurie presenti in uscita al convertitore.

2.4 Quantizzazione e teoria della misurazione

La quantizzazione, intesa come attribuzione del campione convertito a un intervallo di quantizzazione, è un processo di classificazione, in quanto gli intervalli di quantizzazione costituiscono una partizione dello spazio dei possibili ingressi. Dal momento che gli intervalli di decisione sono anche ordinati la quantizzazione è anche un processo di ordinamento. L'attribuzione a ciascun intervallo di un livello di uscita equivalente permette infine di considerare la quantizzazione come una misurazione in senso stretto, in quanto i livelli equivalenti di uscita sono per definizione grandezze razionali.